ENTRÜMPELUNG DES FUNKTIONSBEGRIFFS FÜR BHS UND AHS

von

o.Univ.-Prof.Mag.Dr.S. Großer und Prof.Dr.J. Schärf

An dieser Arbeitsgemeinschaft beteiligten sich etwa 30 Kollegen aus den folgenden Schulsparten: AHS, HTL, HAK, Höhere Landwirtschaftliche Lehranstalten, Höhere Lehranstalten für Wirtschaftliche Frauenberufe. Außerdem beteiligten sich Universitätsassistenten und Studenten lebhaft an der Diskussion. Es wird einvernehmlich festgestellt, daß trotz des verschiedenen Stellenwerts der Mengenlehre in den AHS und den BHS der Funktionsbegriff in den Höheren Schulen mit Hilfe von Begriffen der Mengenlehre eingeführt wird. Ausdrücklich wird festgestellt, daß in den BHS die Mengenlehre nicht als Selbstzweck betrieben wird; sie wird lediglich als Instrument zur besseren Darstellung von mathematischen Sachverhalten benützt.

Es erweckt bei vielen Kollegen Unbehagen, daß verschiedene Begriffe und Symbole, die im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff stehen, in wechselnder Bedeutung verwendet werden. In der Diskussion werden die folgenden Probleme ausführlich behandelt.

<u>Was bedeutet f: $A \to B$?</u>

Muß f für jeden Punkt von A (d.h., <u>jedes</u> Element von A) definiert sein?

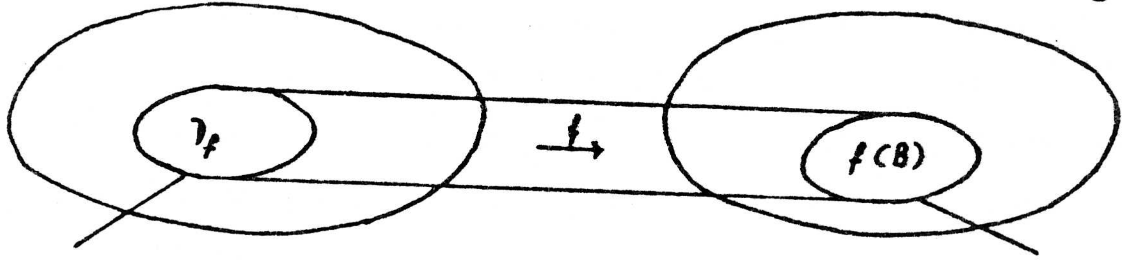
Ist es notwendig bzw. sinnvoll, die <u>Grundmenge</u> A von der <u>Definitionsmenge</u> $D_f \subset A$ zu unterscheiden?

Gegen die Identifizierung $D_f = A$ spricht hauptsächlich die folgende Tatsache. Sehr viele Funktionsbeschreibungen im Unterricht geschehen in der Form $x \mapsto f(x)$, z.B. $x \mapsto \frac{2x-1}{x^2-3}$ oder $x \mapsto \frac{\sin x}{2\tan x + \sin x}$ mit gewissen stillschweigenden Voraussetzungen wie z.B. $A = B = \mathbb{R}$ oder $A = B = \mathbb{Q}$ oder $A = B = \mathbb{C}$. In vielen Fällen kann die Definitionsmenge erst durch Rechnung oder Überlegung bestimmt werden. Auch in der Integralrechnung werden im allgemeinen nur Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachtet, die auf Intervallen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definiert sind.

Auch die Unterscheidung von <u>Zielmenge</u> <u>B</u> und <u>Wertemenge</u> <u>$f(B) \subseteq B$</u> (auch <u>Bildmenge</u> genannt) erweist sich als sinnvoll. Das führt in natürlicher Weise zur Feststellung der Äquivalenz des Symbols $f\colon A \to B$ mit dem "üblichen" Bild:

Grundmenge A

Zielmenge B

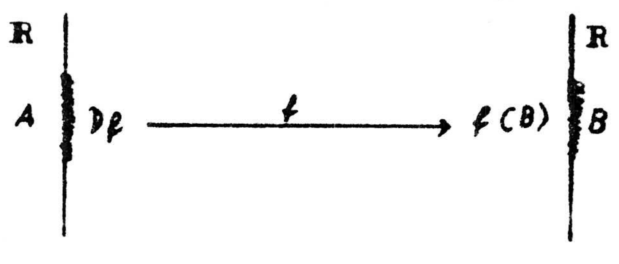


Definitionsmenge D_f

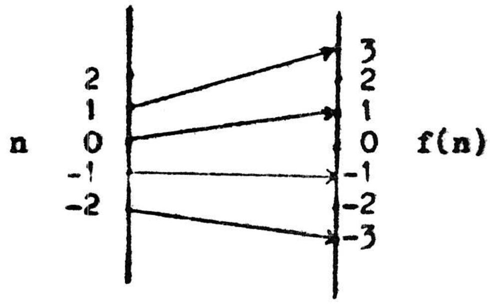
Wertemenge $f(B)$

Eine Minderheit empfindet diese bildliche Darstellung als irreführend und daher unnötig.

Als Ersatz, besonders bei numerischen Funktionen, bietet sich die folgende "Meßlattendarstellung" an:



Für eine Funktion wie z.B. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n+1$, ergibt sich dadurch eine sehr einprägsame Darstellung. (Funktion als Zuordnung).

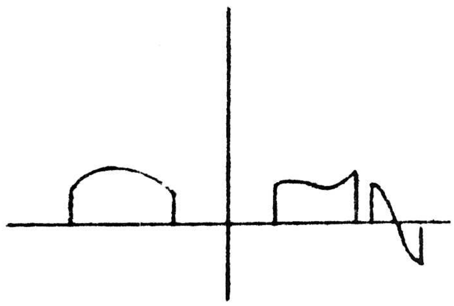


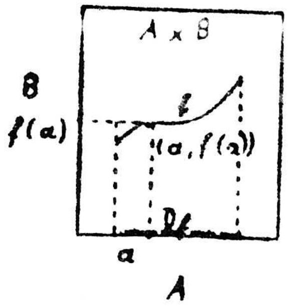
Daraus resultiert ferner sofort die tabellarische Darstellung:

n	f(n)
...	...
2	5
1	3
0	1
-1	-1
-2	-3
...	...

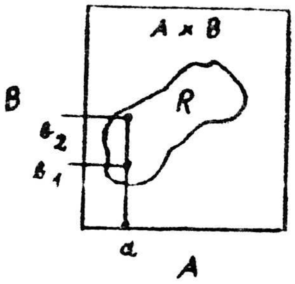
<u>Ist es notwendig, zwischen "Funktion" und "Graph der Funktion" zu unterscheiden?</u>

Der Schüler ist mit der graphischen Darstellung von Funktionen im cartesischen Koordinatensystem vertraut. Es gibt keinen Grund, f nicht als Menge der Paare $(x,f(x))$ im $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ anzusehen. Allgemein ergibt sich daraus sofort das folgende Bild für $f: A \to B$, welches f als Teilmenge des cartesichen Produktes $A \times B$ identifiziert.





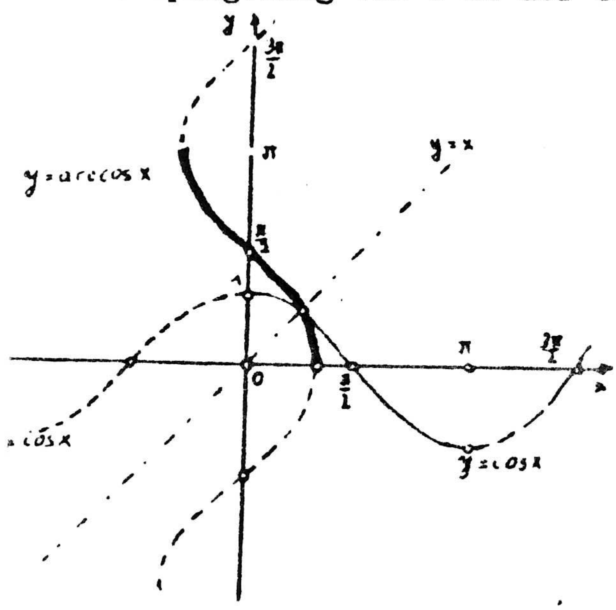
Jedem $a \in D_f \subseteq A$ entspricht genau ein $f(a) \in B$.



Falls die letzte Einschränkung fallen gelassen wird, kommt man zum Begriff der <u>Relation R von A nach B</u>, d.h. einer beliebigen Teilmenge $R \subseteq A \times B$.

<u>Ist es notwendig, zwischen Umkehrfunktion und Umkehrrelation zu unterscheiden?</u>

Die Diskussionsteilnehmer bejahen die Unterscheidung. Für $f: A \rightarrow B$ soll f^{-1} grundsätzlich die Umkehrrelation (d.h. $f^{-1} \subseteq B \times A$) von B nach A bezeichnen. Liest man eine Funktionstabelle für f von rechts nach links, so erhält man sofort f^{-1}; dem entspricht die Vertauschung der "Achsen" A und B, d.h., im (x,y)-Koordinatensystem die Spiegelung von f an der Geraden $y = x$.



Die Umkehrfunktion arccos ist eine Teilmenge von $\cos^{-1}$. Auch die Programme der Taschenrechner treffen für Kreisfunktion und Hyperbelfunktion eine solche Auswahl eines geeigneten Teilstückes von f^{-1}.

Es wird darauf hingewiesen, daß es auch Rechner gibt, die die Umkehrfunktion von f mit f^{-1} bezeichnen.

Ältere Begriffe wie "Hauptwert" und "mehrdeutige Funktion" werden dadurch überflüssig. Auch vom Standpunkt der Universitätsmathematik her gesehen, empfiehlt es sich, das Symbol f^{-1} für die Umkehrrelation von f zu reservieren.

Soll in der Schule zwischen $\sqrt[n]{x}$ und $x^{1/n}$ unterschieden werden?
Im Unterricht wird zunächst $\sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0$ auf die übliche Art definiert; gelegentlich tritt dazu die Definition $\sqrt[2n+1]{a} = \operatorname{sgn}(a) \cdot \sqrt[2n+1]{|a|}$, so daß z.B. auch $\sqrt[3]{-8} = -2$ gilt. Später wird statt $\sqrt[n]{a}$ auch $a^{1/n}$ geschrieben; die Regeln für das Rechnen mit Wurzeln werden meist in dieser Schreibweise formuliert. Für das Differenzieren und Integrieren stellt sich die Potenzschreibweise als (didaktische) Notwendigkeit dar.

Bei komplexen Zahlen c steht $\sqrt[n]{c}$ für n (im allgemeinen) verschiedene komplexe Werte. Es wurde auch vorgeschlagen, $\sqrt[n]{a}$ nur für $a \geq 0$ und in den anderen Fällen die Potenzschreibweise $a^{1/n}$ bzw. $c^{1/n}$ zu verwenden. Dieses Problem wird ausführlich diskutiert, wobei auch die bei Programmiersprachen und Taschenrechnern auftretenden Probleme berücksichtigt werden. Es stellt sich als vorteilhaft heraus, sich alle Möglichkeiten offen zu lassen, d.h. in der jeweiligen Situation die passendste Interpretation zu wählen.

o.Univ.-Prof.Mag.Dr.S. Großer
Institut für Mathematik
der Universität Wien
Boltzmanngasse 9
1090 Wien

Prof.Dr.J. Schärf
TGM
Wexstraße 17
1200 Wien